

CHAPITRE IV

La polarisation de la lumière

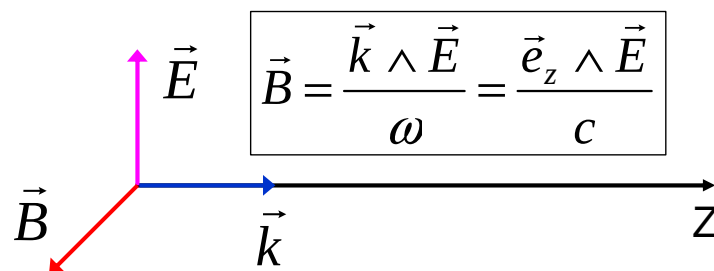
03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

1

I - Introduction

La lumière est une Onde Electromagnétique transverse



$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct

$\vec{E} \perp \vec{B}$ à tout instant

Comme toute onde transverse, la lumière peut présenter différents états de polarisation

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

2

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k z - \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k z - \varphi_y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - k z) \\ E_{0y} \cos(\omega t - k z - \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec : } \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

Si on choisi φ_x comme origine des phases

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - k z)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - k z - \varphi)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En représentation complexe

II. Les différents états de polarisation

Dans une **lumière naturelle** (soleil, bougie, lampe, etc.) $\vec{E}$ peut prendre **aléatoirement toutes les directions** du plan $\perp$ à $\vec{k}$

Si $\vec{E}$ prend **une direction bien définie** en fonction du temps, alors **la lumière est dite polarisée**.

1. Polarisation rectiligne

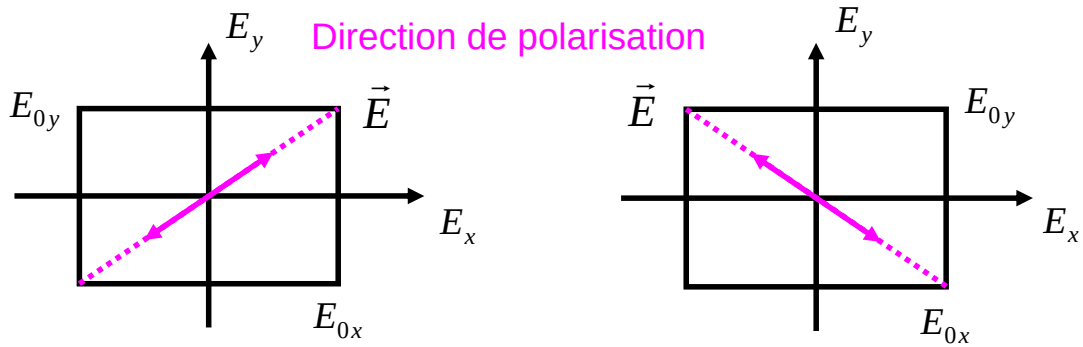
Si $\vec{E}$ garde **une direction fixe** dans le temps, alors la lumière est dite **polarisée rectiligne**.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u} \quad \vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{i} + E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kz) \vec{j} \\ &= \pm E_{0x} \cos(\omega t - kz) \vec{i} \pm E_{0y} \cos(\omega t - kz) \vec{j} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \end{aligned}$$

$$E_{0x} = E_0 |\cos \alpha|$$

$$E_{0y} = E_0 |\sin \alpha|$$



$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \frac{E_y}{E_{0y}} \Rightarrow E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

$$\varphi = 0$$

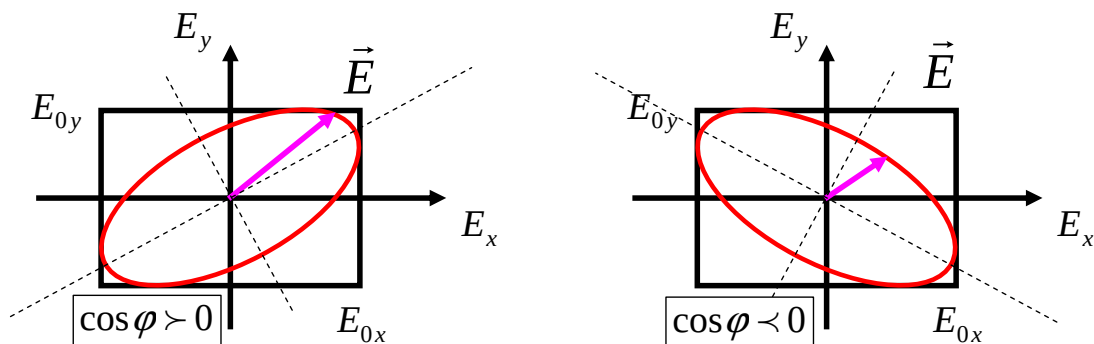
$$\frac{E_x}{E_{0x}} = -\frac{E_y}{E_{0y}} \Rightarrow E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

$$\varphi = \pi$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - k z - \varphi) \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{avec : } \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

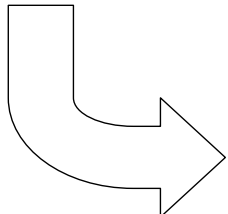
2. Polarisation elliptique

Si $\vec{E}$ tourne dans le temps et son extrémité décrit une ellipse alors la lumière est dite polarisée elliptique.



$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - k z - \varphi) \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \text{avec : } \varphi \neq 0 \text{ et } \varphi \neq \pi$$

$$\left| \begin{aligned} \frac{E_x}{E_{0x}} &= \cos(\omega t - k z) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} &= \cos(\omega t - k z - \varphi) = \cos(\omega t - k z) \cos \varphi + \sin(\omega t - k z) \sin \varphi \end{aligned} \right.$$



$$\left| \begin{aligned} \frac{E_x}{E_{0x}} &= \cos(\omega t - k z) & (1) \\ \frac{E_y}{E_{0y} \sin \varphi} - \frac{E_x}{E_{0x}} \operatorname{ctg} \varphi &= \sin(\omega t - k z) & (2) \end{aligned} \right.$$



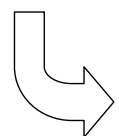
$$(1)^2 + (2)^2$$

$$\left[\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y} \sin \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \operatorname{ctg} \varphi \right)^2 \right] = 1$$

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

7

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y} \sin \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \operatorname{ctg} \varphi \right)^2 = 1$$


$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) + \left(\frac{E_y}{E_{0y} \sin \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \right) + \left(\frac{E_y}{E_{0y} \sin \varphi} \right)^2 - 2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 - 2 \cos \varphi \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = \sin^2 \varphi$$

Équation d'une ellipse inscrite dans un rectangle de dimensions $2E_{0x}/2E_{0y}$

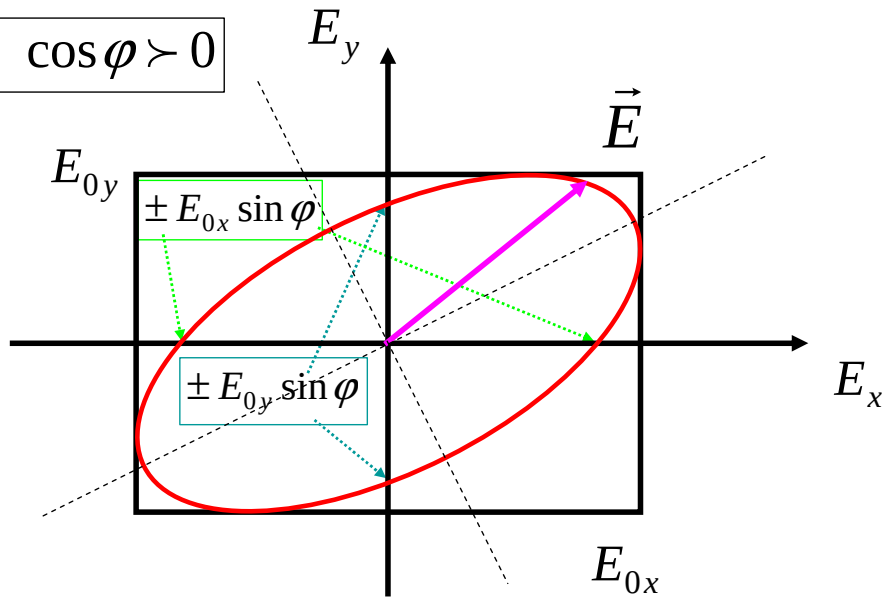
03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

8

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = \sin^2\varphi$$

Cas $\cos\varphi > 0$



03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

9

$$2\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right)dE_x + 2\left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right)dE_y - 2\cos\varphi \frac{dE_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} - 2\cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{dE_y}{E_{0y}} = 0$$

$$2\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right) + 2\left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right) \frac{dE_y}{dE_x} - 2\cos\varphi \frac{1}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} - 2\cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}E_{0y}} \frac{dE_y}{dE_x} = 0$$

$$2\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right) + \left[2\left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right) - 2\cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}E_{0y}}\right] \frac{dE_y}{dE_x} - 2\cos\varphi \frac{1}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$

$$\frac{dE_y}{dE_x} = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right) - 2\cos\varphi \frac{1}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} - \cos\varphi \frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi > 0 \text{ et } (E_x \text{ et } E_y) \text{ de même signe} \\ \text{ou } \cos\varphi < 0 \text{ et } (E_x \text{ et } E_y) \text{ de signes opposés} \end{cases}$$

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

10

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \cos \varphi \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = \sin^2 \varphi$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad \text{Pour } \varphi = 0$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} + \frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \quad \text{Pour } \varphi = \pi$$

On retrouve les deux cas particuliers de polarisation rectiligne

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \quad \text{Pour } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{Ellipse droite}$$

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

11

La polarisation elliptique peut être **gauche** ou **droite** selon le sens de parcours de l'ellipse

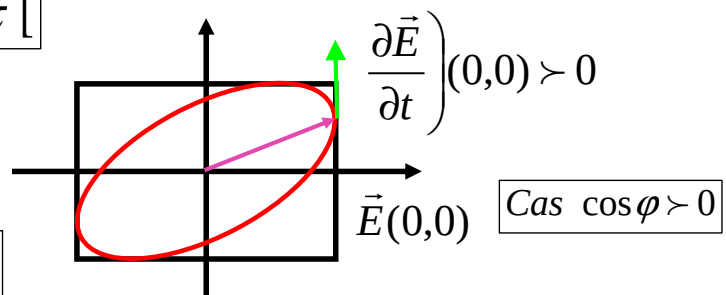
$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - k z - \varphi) \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(0,0) = \begin{cases} E_{0x} \\ E_{0y} \cos \varphi \end{cases}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = \begin{cases} -E_{0x} \omega \sin(\omega t - k z) = 0 \\ -E_{0y} \omega \sin(\omega t - k z - \varphi) = E_{0y} \omega \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{Si } \sin \varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi \in]0, \pi[$$

Le champ tourne dans le
sens inverse des
aiguilles d'une montre

Polarisation elliptique
gauche



03/01/2009

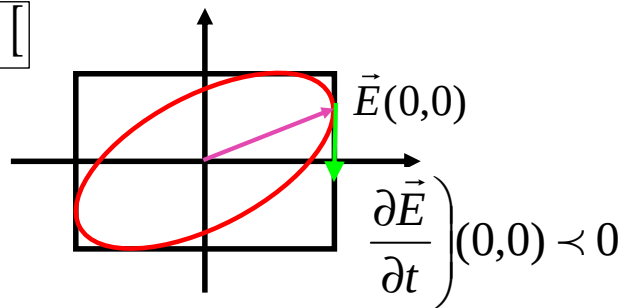
Optique 2 : E. Ech-chamikh

12

Si $\sin \varphi < 0 \Leftrightarrow \varphi \in]\pi, 2\pi[$

Le champ tourne **dans le sens des aiguilles d'une montre**

Polarisation elliptique **droite**



Cas $\cos \varphi > 0$

3. Polarisation circulaire

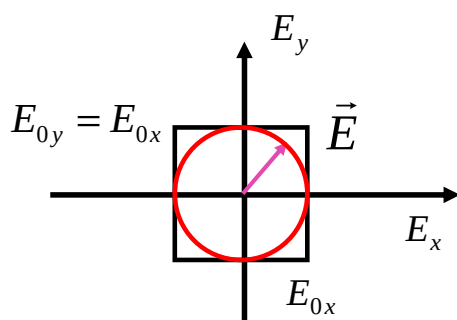
Si $\vec{E}$ tourne dans le temps et son extrémité décrit un cercle alors la lumière est dite **polarisée circulaire**.

C'est le cas particulier d'une ellipse droite avec : $E_{0x} = E_{0y}$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2 \cos \varphi \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} = \sin^2 \varphi$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1 \quad \text{Pour } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \text{Ellipse droite}$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{0x}^2 = R^2 \quad \text{Si } E_{0x} = E_{0y} = R \quad \text{Cercle de rayon R}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi > 0$$

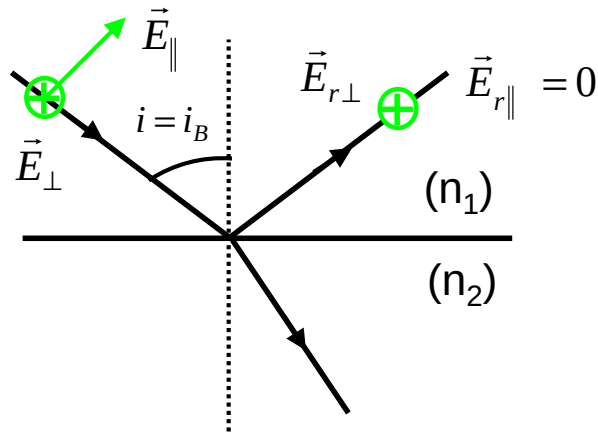
Polarisation Circulaire **gauche**

$$\varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \varphi < 0$$

Polarisation Circulaire **droite**

III. Production d'une lumière polarisée

1. Polarisation par réflexion



$\vec{E}_{\parallel}$: $\parallel$ au plan d'incidence

$\vec{E}_{\perp}$: $\perp$ au plan d'incidence

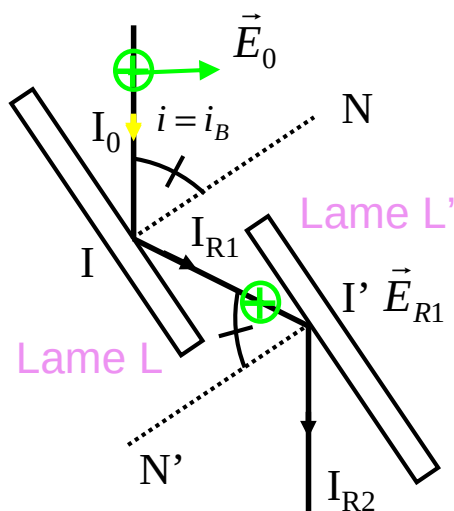
$$\operatorname{tgi}_B = \frac{n_2}{n_1}$$

La lumière réfléchie **en incidence Brewstérienne** est polarisée dans la direction $\perp$ au plan d'incidence

i_B est appelé angle d'incidence de Brewster

L'incidence est dite **Brewstérienne**

Expérience



Rotation de L' autour de II'

$I_{R2} = 0$ quand $I'N'$ devient dans le plan $\perp$ au plan de la figure

Interprétation

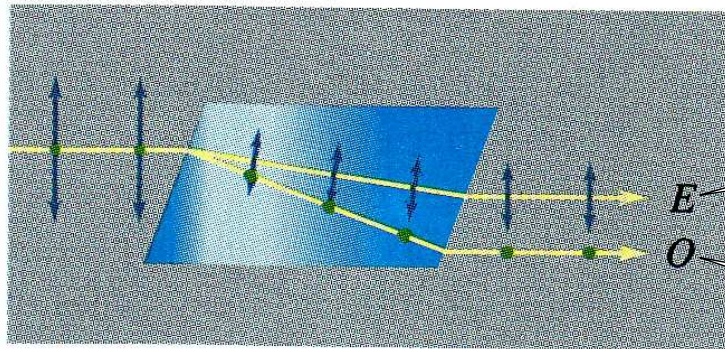
Quand $I'N'$ devient dans le plan $\perp$ au plan de la figure, $\vec{E}_{R1} = \vec{E}_{R1\parallel}$. Donc $I_{R2} = 0$

2. Polarisation par double réfraction

Double réfraction (ou **biréfringence**) : deux rayons réfractés pour un rayon incident.

Cas des **cristaux anisotropes** : un indice de réfraction pour chacune des 2 directions de polarisations.

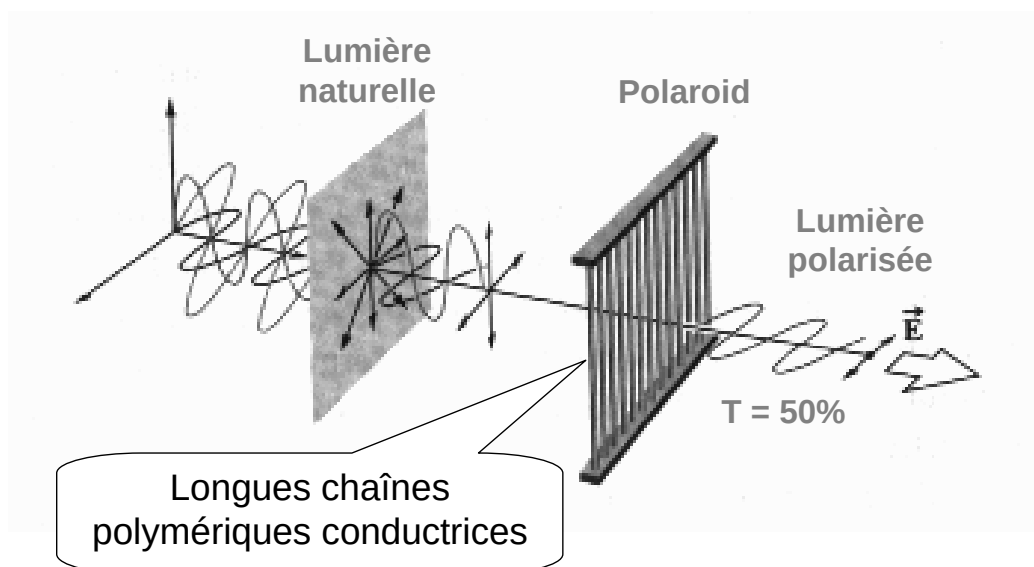
Les deux composantes du champs sont alors séparées.



Rayon **extraordinaire**
(ne suit pas les lois
de Descartes)

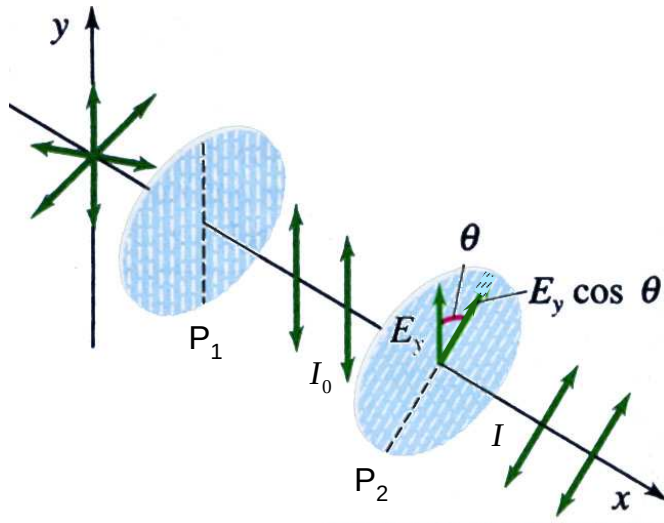
Rayon **ordinaire** (suit
les lois de Descartes)

3. Polarisation par dichroïsme (Polaroids)



4. Loi de Malus

Un polariseur ne laisse passer que la **projection** du champ incident sur la **direction de polarisation**



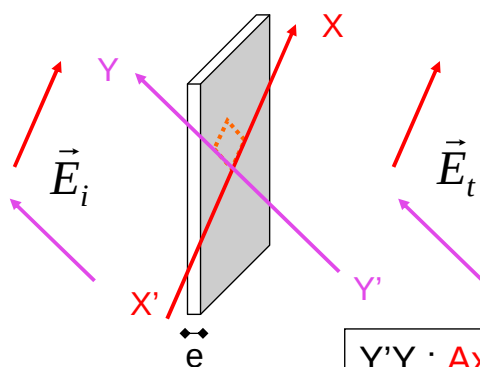
$$\begin{aligned}
 I_0 &\propto E_y^2 \\
 I &\propto E_t^2 = (E_y \cos \theta)^2 = E_y^2 \cos^2 \theta \\
 \frac{I}{I_0} &= \frac{E_y^2 \cos^2 \theta}{E_y^2} = \cos^2 \theta \\
 I &= I_0 \cos^2 \theta
 \end{aligned}$$

IV. Lames anisotropes

Lame anisotrope = lame d'un cristal anisotrope (n_x, n_y)

1- lignes neutres d'une lame anisotrope

Axes X'X et Y'Y des deux directions de polarisation de la lame



Indices différents

Vitesses différentes

$$v_x = \frac{c}{n_x} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{c}{n_y}$$

Y'Y : **Axe lent** (faible vitesse, grand indice)

X'X : **Axe rapide** (grande vitesse, faible indice)

2- Déphasage entre les ondes transmises

$$\Phi = \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi(en_y - en_x)}{\lambda} = \frac{2\pi e(n_y - n_x)}{\lambda}$$

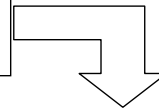
3- Action d'une lame anisotrope sur une onde

A l'entrée de la lame ($\mathbf{z} = \mathbf{0}$) $\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$

A la sortie de la lame ($\mathbf{z} = \mathbf{e}$)

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - k_x e) = E_{0x} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi n_x}{\lambda} e\right) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi - k_y e) = E_{0y} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi n_y}{\lambda} e\right) \end{cases}$$

Changement de l'origine des temps (ou origine des phases)



$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi n_y}{\lambda} e + \frac{2\pi n_x}{\lambda} e\right) \\ = E_{0y} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi(n_y - n_x)}{\lambda} e\right) \\ = E_{0y} \cos(\omega t - \varphi - \Phi) \end{cases}$$

En général, c'est une lumière elliptique

4- Cas particuliers de lames anisotropes

Pour une longueur d'onde λ donnée :

Lame demi onde	$\delta = e(n_y - n_x) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi e(n_y - n_x)}{\lambda} = \frac{2\pi\lambda}{2\lambda} = \pi$
Lame quart d'onde	$\delta = e(n_y - n_x) = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi e(n_y - n_x)}{\lambda} = \frac{2\pi\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2}$

5- Exemple : Effet d'une lame demi onde sur une lumière polarisée rectiligne

03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

23

A l'entrée de la lame ($z = 0$)

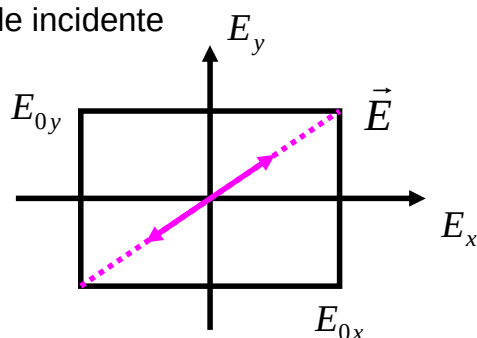
$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t) \end{cases}$$

A la sortie de la lame ($z = e$)

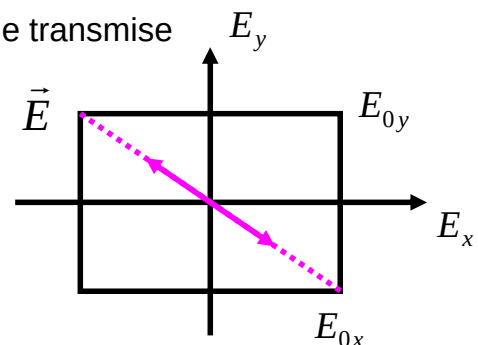
$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \Phi) = E_{0y} \cos(\omega t - \pi) = -E_{0y} \cos(\omega t) \end{cases}$$

Lumière rectiligne **symétrique** de la lumière incidente par rapport à Y'Y

Onde incidente



Onde transmise



03/01/2009

Optique 2 : E. Ech-chamikh

24